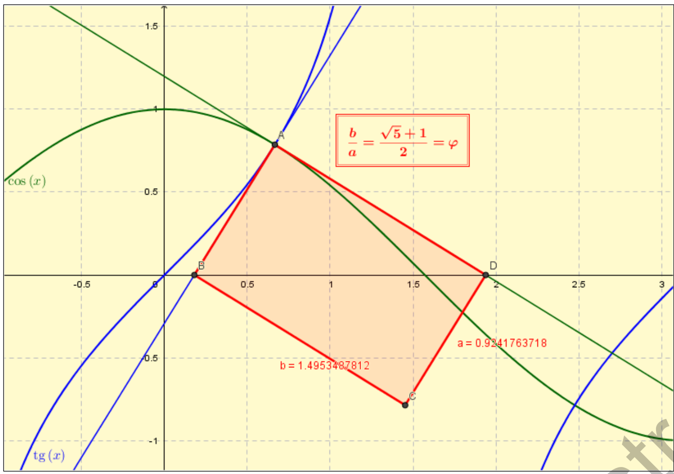
Ignacio Larrosa Cañestro, 3/7/2018

φ en la gráfica de y = cos(x) e y = tg(x)



El número φ es la razón áurea o número de oro, $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Es la solución positiva de la ecuación $t^2 - t - 1 = 0$, por lo que $\varphi^2 = \varphi + 1$ y, dividiendo por φ, $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$.

El punto de corte de las gráficas de y = cos(x) e y = tg(x) en el primer cuadrante es:

$$\cos x = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

$$A = \left(\operatorname{arcsen}(\varphi - 1), \cos\left(\operatorname{arcsen}(\varphi - 1)\right)\right) = \left(\operatorname{arcsen}(\varphi - 1), \sqrt{1 - (\varphi - 1)^2}\right)$$
$$= \left(\operatorname{arcsen}(\varphi - 1), \sqrt{2\varphi - \varphi^2}\right) = \left(\operatorname{arcsen}(\varphi - 1), \sqrt{\varphi - 1}\right)$$

La derivada de $y = \cos x$ es $y' = -\operatorname{sen} x$, que en A vale $\varphi - 1$. La ecuación de la tangente es entonces:

$$t_{cos}: y = \sqrt{\varphi - 1} - (\varphi - 1)\left(x - \operatorname{arcsen}(\varphi - 1)\right)$$

Y corta al eje Ox en el punto de abscisa $\frac{1}{\sqrt{\varphi - 1}} + \operatorname{arcsen}(\varphi - 1)$. Por tanto,

$$b=\sqrt{\left(\operatorname{arcsen}(\varphi-1)-\frac{1}{\sqrt{\varphi-1}}-\operatorname{arcsen}(\varphi-1)\right)^2+\left(\sqrt{\varphi-1}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{\varphi-1}+\varphi-1}=\sqrt{\varphi+\frac{1}{\varphi}}=\sqrt[4]{5}\cong 1.495348781$$

La derivada de $y=\operatorname{tg}x$ es $y'=1+\operatorname{tg}^2 x$, que en A es $1+\left(\sqrt{\varphi-1}\right)^2=\varphi$, opuesta e inversa a la de cos(x), por lo que las tangentes en ese punto a las gráficas de estas funciones son perpendiculares. La ecuación de la tangente a la g´rafica de tg(x) es:

$$t_{tg}: y=\sqrt{\varphi-1}+\varphi\left(x-\operatorname{arcsen}(\varphi-1)\right)$$

Corta al eje Ox en el punto de abscisa $\operatorname{arcsen}(\varphi-1)-\frac{\sqrt{\varphi-1}}{\varphi}=\operatorname{arcsen}(\varphi-1)-\frac{1}{\varphi\sqrt{\varphi}}$. Por tanto,

$$a=\sqrt{\left(\operatorname{arcsen}(\varphi-1)-\operatorname{arcsen}(\varphi-1)+\frac{1}{\varphi\sqrt{\varphi}}\right)^2+\left(\sqrt{\varphi-1}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{\varphi^3}+\varphi-1}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{\varphi^3}+\frac{1}{\varphi}}=\frac{1}{\varphi}\sqrt{\frac{1}{\varphi}+\varphi}=\frac{1}{\varphi}\sqrt[4]{5}\cong 0.9241763718$$

Por tanto

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{b}{a}=\varphi}}$$

El área del rectángulo es $S=\frac{1}{\varphi}\sqrt[4]{5}\sqrt[4]{5}=\frac{\sqrt{5}}{\varphi}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\cong 1.381966011$