La suma de los cubos a veces es igual al cuadrado de la suma …

Si n es un natural cualquiera, sea $\{a=1, b, c, \ldots, n=m\}$ la lista de sus divisores. La lista del número de divisores de estos últimos es: $\{a'=1, b', c', \ldots, m'\}$, donde son posibles las repeticiones. Pues bien, para los números de esta lista sorprendentemente se verifica que:

$$\mathrm{a}'^3+\mathrm{b}'^3+\ldots+\mathrm{m}'^3=(\mathrm{a}'+\mathrm{b}'+\ldots+\mathrm{m}')^2 \qquad (1)$$

Veamos la demostración.

1. Si $n=p^k$, sus divisores son $1, p, p^2, \ldots, p^k$ con $1, 2, 3, \ldots, k+1$ divisores cada uno de ellos. Pero es bien conocido que:

$$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=\big(1+2+\cdots+(k+1)\big)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

La última igualdad es sencilla de ver, como ya mostró el pequeño Gauss a su maestro:

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}\big((1+2+\cdots+k)+(k+\cdots+2+1)\big)=\frac{1}{2}\big((k+1)+\cdots(k+1)\big)=\frac{k(k+1)}{2} \qquad (3)$$

Veamos la demostración de (2) por inducción. Para $k=1$ es cierto, $1^3=1^2$. Supongamos que se verifica para k y veamos que entonces también lo hace para $k+1$:

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}=\frac{(k^2+4k+4)(k+1)^2}{4}=\frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2=(1+2+\cdots+k+(k+1))^2$$ (q.e.d.)

Por tanto, para potencias de primos ya está demostrado.

2. Sea ahora $n=m\cdot p^r$, con p primo y $mcd(p,m)=1$. Veamos que si la propiedad

se verifica para m, también lo hace para n.

Sean $a=1, b, \ldots, m$ los divisores de m, y $a', b', \ldots, m'$ respectivamente el número de sus divisores.

Como suponemos que la igualdad propuesta se verifica para m, tendremos que

$$a'^3+b'^3+\ldots+m'^3=(a'+b'+\ldots+m')^2$$

Todos los divisores de n, sin duplicidades, son:

$$a=1, b, \ldots, m, ap, bp, \ldots, mp, ap^2, bp^2, \ldots, mp^2, \ldots, ap^r, bp^r, \ldots, mp^r=n$$

(recordemos que $mcd(p,m)=1$)

Estos divisores tienen a su vez los siguientes números de divisores:

$$a', b', \ldots, m', 2a', 2b', \ldots, 2m', 3a', 3b', \ldots, 3m', \ldots, (r+1)a', (r+1)b', \ldots, (r+1)m'$$

Sumando todos estos números, tenemos

$S = (a' + b' + \ldots + m')(1 + 2 + \ldots + (r + 1))$

Y el cuadrado de la suma es

$S^2 = (a' + b' + \cdots + m')^2 \big(1 + 2 + \cdots + (r + 1)\big)^2$

Puesto que los números en cada paréntesis verifican la propiedad, tenemos entonces que

$S^2 = (a'^3 + b'^3 + \ldots + m'^3)(1^3 + 2^3 + \ldots + (r + 1)^3)$

y desarrollando el producto, tenemos la suma de los cubos de todos los números de divisores de los divisores de n.

3. Sea ahora $n = p^a q^b \ldots r^c$ la descomposición factorial de cualquier natural n.

Como por 1. sabemos que la propiedad es cierta para $n_1 = p^a$, y $mcd(p, q) = 1$, también será cierta, por 2., para $n_2 = n_1 \cdot q^b$. Reiterando el proceso para todos los factores primos de n, queda probado para todo n. (q.e.d.)

La igualdad (2) era conocida desde antiguo, posiblemente desde *Pitágoras.* La brillante generalización mostrada se debe al matemático francés Joseph Liouville, tal y como se ve en [1].

Pero no son las únicas listas de números naturales con esta propiedad. Para cualquier *n*, una lista formada por *n* copias de *n*, también lo verifica, pues obviamente $n \cdot n^3 = (n \cdot n)^2$. Pero para n > 2 hay más, muchas más cuanto mayor *n*, aunque siempre en número finito [2]. Este autor también muestra, entre otras cosas, que la única lista con *n* naturales **distintos** que verifica la propiedad es precisamente $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Bibliografia

[1] Ross Honsberger, *El Ingenio en las Matemáticas.* Colección La Tortuga de Aquiles nº 4, Editorial Euler (Madrid 1994)

[2] Edward Barbeau, Samer Seraj. University of Toronto (https://arxiv.org/pdf/1306.5257 21//06/2013)