Ignacio Larrosa Cañestro

Senos y cosenos de los ángulos múltiplos de 3º

A partir de los polígonos regulares de 3, 4 y 5 lados, pueden calcularse las razones de 30º, 45º y 36º respectivamente, considerando la altura en el caso de 30º, y las diagonales en los de 45º y 36º. A partir de ellas y empleando únicamente los teoremas de adición:

$$\mathrm{sen}(a + b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\mathrm{sen}(b)$$
$$\mathrm{sen}(a - b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) - \cos(a)\mathrm{sen}(b)$$
$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$$
$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$$

pueden calcularse las de todos los otros ángulos múltiplos de 3º, dado que mcd(30, 36, 45) = 3. Los programas de cálculo simbólico, como ***DERIVE***, no simplifican todas ellas a estás formas simbólicas.

Solo se dan los comprendidos entre 0 y 45º, pues para ángulos entre 45º y 90º se reduce al complementario, y de forma similar, con las relaciones adecuadas, para ángulos mayores que 90º.

El seno y coseno del ángulo de 15º se obtienen a partir de 45º–30º.

A partir del pentágono regular, se puede determinar el cos(36º), igual a la mitad del número áureo φ. A partir de este valor se determina sen(36º). Las razones de 18º pueden calcularse por diferencia entre 36º y su complementario, 54º (o como las de ½36º).

Los de 9º se obtienen por diferencia de 45º y 36º, y los de 27º a partir de 18º + 9º ó 36º – 9º.

Los de 6º a partir de 36º – 30º, y duplicando, obtenemos los de 12º y 24º. Los de 3º, 21º, 33º, 39º y 42º se obtienen igualmente por suma o diferencia de los calculados previamente. Muchos de ellos también pueden determinarse como la mitad de otros previamente calculados, o de sus complementarios.

Ningún otro ángulo en el intervalo 0º – 45º cuyo valor se exprese con un número entero de grados puede obtenerse a partir de estos. Empleando las fórmulas del ángulo mitad, pueden obtenerse las de ángulos múltiplos de 1º30', de 45', …, que son progresivamente más complejas.

Se pueden obtener otras expresiones equivalentes en muchos casos. Se ha preferido la forma de fracción con denominador racional y menor número de raíces posible. En ocasiones, se sacrifica este criterio para adoptar formas tan similares como sea posible para el seno y el coseno.

Senos y cosenos de los ángulos de 0 a 45º, múltiplos de 3º

Áng.	Seno	Coseno
0	0	1
3º	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}$
6º	$\frac{\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)}{8}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{8}$
9º	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)-2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)+2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{8}$
12º	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$	$\frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}-1)}{8}$
15º	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$
18º	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2\varphi}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
21º	$\frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)}{16}$	$\frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)}{16}$
24º	$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{(\sqrt{5}+1)-\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$
27º	$\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{8}$	$\frac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{8}$
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
33º	$\frac{2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)}{16}$	$\frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{16}$
36º	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{\varphi}{2}$
39º	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}}{16}$
42º	$\frac{\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}-1)}{8}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

En Formato *DERIVE* (y otros programas de cálculo simbólico)

sen(0º) = 0
cos(0º) = 1
sen(3º) = (sqrt(2)*(sqrt(3)+1)*(sqrt(5)-1)-2*(sqrt(3)-1)*sqrt(5+sqrt(5)))/16
cos(3º) = (sqrt(2)*(sqrt(3)-1)*(sqrt(5)-1)+2*(sqrt(3)+1)*sqrt(5+sqrt(5)))/16
sen(6º) = (sqrt(3)*sqrt(10-2*sqrt(5))-(sqrt(5)+1))/8
cos(6º) = (sqrt(10-2*sqrt(5))+sqrt(3)*(sqrt(5)+1))/8
sen(9º) = (sqrt(2)*(sqrt(5)+1)-2*sqrt(5-sqrt(5)))/8
cos(9º) = (sqrt(2)*(sqrt(5)+1)+2*sqrt(5-sqrt(5)))/8
sen(12º) = (sqrt(10+2*sqrt(5))-sqrt(3)*(sqrt(5)-1))/8
cos(12º) = (sqrt(3)*sqrt(10+2*sqrt(5))+(sqrt(5)-1))/8
sen(15º) = sqrt(2)*(sqrt(3)-1)/4
cos(15º) = sqrt(2)*(sqrt(3)+1)/4
sen(18º) = (sqrt(5)-1)/4
cos(18º) = sqrt(2)*sqrt(5+sqrt(5))/4
sen(21º) = (2*(sqrt(3)+1)*sqrt(5-sqrt(5))-sqrt(2)*(sqrt(3)-1)*(sqrt(5)+1))/16
cos(21º) = (2*(sqrt(3)-1)*sqrt(5-sqrt(5))+sqrt(2)*(sqrt(3)+1)*(sqrt(5)+1))/16
sen(24º) = (sqrt(3)*(sqrt(5)+1)-sqrt(10-2*sqrt(5)))/8
cos(24º) = ((sqrt(5)+1)+sqrt(3)*sqrt(10-2*sqrt(5)))/8
sen(27º) = (2*sqrt(5+sqrt(5))-sqrt(2)*(sqrt(5)-1))/8
cos(27º) = (2*sqrt(5+sqrt(5))+sqrt(2)*(sqrt(5)-1))/8
sen(30º) = 1/2
cos(30º) = sqrt(3)/2
sen(33º) = (2*(sqrt(3)-1)*sqrt(sqrt(5)+5)+sqrt(2)*(sqrt(3)+1)*(sqrt(5)-1))/16
cos(33º) = (2*(sqrt(3)+1)*sqrt(sqrt(5)+5)-sqrt(2)*(sqrt(3)-1)*(sqrt(5)-1))/16
sen(36º) = sqrt(10-2*sqrt(5))/4
cos(36º) = (sqrt(5)+1)/4
sen(39º) = (sqrt(2)*(sqrt(3)+1)*(sqrt(5)+1)-2*(sqrt(3)-1)*sqrt(5-sqrt(5)))/16
cos(39º) = (sqrt(2)*(sqrt(3)-1)*(sqrt(5)+1)+2*(sqrt(3)+1)*sqrt(5-sqrt(5)))/16
sen(42º) = (sqrt(3)*sqrt(10+2*sqrt(5))-(sqrt(5)-1))/8
cos(42º) = (sqrt(10+2*sqrt(5))+sqrt(3)*(sqrt(5)-1))/8
sen(45º) = sqrt(2)/2
cos(45º) = sqrt(2)/2