Repeticiones no triviales en el triángulo de Tartaglia

En el triángulo de Tartaglia hay infinitos 1 en las diagonales exteriores. Además, en la fila n aparece el número n dos veces como Comb(n, 1) y Comb(n, n-1). Dada la simetría del triángulo, cualquier otro número que aparezca en él, lo hace al menos tres veces si esta en el centro de una fila, es decir, es de la forma Comb(2n, n), o cuatro veces si aparece en cualquier otra posición. Estas son las repeticiones triviales.

¿Hay otras? Es decir, ¿hay números que se repitan más de cuatro veces en el triángulo de Tartaglia? Para ello basta con que

Comb(n, k) = Com(n', k'), $1 < k < n-1$, $1 < k' < n'-1$ y $n \neq n'$.

Por ejemplo:

$$120 = \binom{16}{2} = \binom{10}{3}$$

$$210 = \binom{21}{2} = \binom{10}{4}$$

$$1540 = \binom{56}{2} = \binom{22}{3}$$

$$3003 = \binom{78}{2} = \binom{15}{5} = \binom{14}{6}$$

$$7140 = \binom{120}{2} = \binom{36}{3}$$

$$11628 = \binom{153}{2} = \binom{19}{5}$$

$$24310 = \binom{221}{2} = \binom{17}{8}$$

Aquí están reflejadas solo las repeticiones no triviales. El número total de veces que aparecen cada uno de ellos en el triángulo de Tartaglia es el doble de las enumeradas, por la simetría del triángulo, más 2, en su "propia" fila. Entonces todos se repiten 6 veces, excepto el 3003, que lo hace ocho veces.

En todos los casos, se trata de una igualdad entre un número triángular, Comb(n, k) con k=2, y otro, mientras que en el caso de 3003, aparte de esta igualdad se da otro entre números con valores de k mayores que 2, en la forma $\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k}$.

Concretamente, parece que repeticiones de la forma Comb(n, 2) = Comb(k, 3) solo existen las tres reseñadas más arriba (**Richard Guy**, Uunsolved Problems in Number Theory, sections D3, B31, etc).

En general, las ecuaciones diofánticas de grado superior al segundo tienen, salvo casos degenerados, un número finito de soluciones, resultados obtenidos por **Thue**, **Mordell** y **Siegel**, entre otros. Y la igualdad Comb(n, 2) = Comb(k, 3) nos lleva a una ecuación de grado 3:

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{3} \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{k!}{3!(k-3)!} \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \Rightarrow$$

$$3n(n-1) = k(k-1)(k-2)$$

Ecuación que no es degenerada. Por tanto solo tiene un número finito de soluciones. Más complicado es determinar cuantas y cuales ..., pero parece que son únicamente las tres ya indicadas: (n, k) = (16, 10), (56, 22) y (120, 36).

Algo parecido ocurre si tratamos de buscar soluciones $\binom{n}{k} = \binom{n'}{k'}$, con k < k' y k > 2 ó k' > 3. Obtenemos en general ecuaciones diofánticas de grado superior a 3, salvo que sea n' = n – 1 y k = k' - 1, que tendrán a lo sumo un numero finito de soluciones, difíciles de determinar analíticamente. Lo que si se puede es buscarlas numéricamente con ordenador. Esta búsqueda se ha realizado hasta $33 \cdot 10^{16}$, sin que apareciesen más soluciones que las reseñadas anteriormente.

Sin embargo, si podemos encontrar es una colección infinita numerable de soluciones formada por pares de números de la forma $\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k} \Leftrightarrow \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \Leftrightarrow$$
$$\frac{n}{(n-k+1)(n-k)} = \frac{1}{k} \Leftrightarrow n \cdot k = (n-k+1)(n-k) \Leftrightarrow$$
$$n^2 + k^2 - 3n \cdot k + n - k = 0$$

Esta es una ecuación de 2º grado en dos variables, que puede tener una infinidad de soluciones.

Completemos cuadrados, multiplicando la ecuación por 20

$$20n^2 + 20k^2 - 60n \cdot k + 20n - 20k = 0$$
$$25n^2 + 25k^2 - 50n \cdot k + 20n - 20k + 4 - 5n^2 - 5k^2 - 10n \cdot k = 4$$
$$(5n - 5k + 2)^2 - 5(n + k)^2 = 4$$

Efectuando el cambio de variables:

$$\left.\begin{array}{l} r = 5n - 5k + 2 \\ s = n + k \end{array}\right\} \quad [\#1]$$

queda la ecuación diofántica cuadrática (ecuación de Pell generalizada),

$$r^2 - 5s^2 = 4 \quad [\#2]$$

Estas ecuaciones, o no tienen soluciones o tienen un numero infinito de ellas. Y esta cae en el segundo caso. Sus soluciones se construyen a partir de las soluciones de la ecuación regular de Pell asociada, $p^2 - 5q^2 = 1$ [#3], y un conjunto finito de soluciones primitivas de #2.

Las soluciones de la ecuación de Pell ordinaria $p^2 - Dq^2 = 1$, donde D>0 no es un cuadrado perfecto, son:

$$(p_i, q_i), \quad con \quad p_i \pm q_i\sqrt{D} = \left(p_1 \pm q_1\sqrt{D}\right)^i, i \geq 0$$

donde (p_1, q_1) es la solución mínima positiva de la ecuación. Que todos son soluciones se comprueba fácilmente, pues

$$(p_i^2 - q_i^2 \cdot D) = (p_i + q_i \cdot \sqrt{D})(p_i - q_i \cdot \sqrt{D}) =$$
$$(p_1 + q_1 \cdot \sqrt{D})^i (p_1 - q_1 \cdot \sqrt{D})^i = (p_1^2 - q_1^2 \cdot D)^i = 1$$

Puede verse que estas son todas las soluciones de la ecuación **(Alan Baker:** *Breve introducción a la teoría de los números,* Alianza Editorial, 1986)**.**

Para la ecuación [#3], la solución positiva mínima es (9, 4), como se comprueba fácilmente. Por tanto todas las soluciones de [#3] son

$$(p_i, q_i), \quad con \quad p_i \pm q_i\sqrt{5} = \left(9 \pm 4\sqrt{5}\right)^i, i \geq 0$$

Si ahora es (r_a, s_a) una solución de [#2], a partir de ella podemos construir una infinidad de soluciones ($r_{a,i}$, $s_{a,i}$), con

$$\begin{array}{ll} (r_{a,i}, s_{a,i}), \quad con \quad r_{a,i} \pm s_{a,i}\sqrt{5} = \left(r_a \pm s_a\sqrt{5}\right)\left(9 \pm 4\sqrt{5}\right)^i, i \geq 0 & \\ donde \quad (r_a, s_a) = (r_{a,0}, s_{a,0}) & [\#4] \end{array}$$

Donde los signos deben tomarse siempre '+' o siempre '-'. Para comprobar esto no hay más que multiplicar las igualdades con signo '+' por las correspondientes con signo '-':

$$r_{a,i}^2 - s_{a,i}^2 5 = \left(r_{a,i} + s_{a,i}\sqrt{5}\right)\left(r_{a,i} - s_{a,i}\sqrt{5}\right) = \left(r_a + s_a\sqrt{5}\right)\left(9 + 4\sqrt{5}\right)^i \left(r_a - s_a\sqrt{5}\right)\left(9 - 4\sqrt{5}\right)^i =$$
$$\left(r_a^2 - s_a^2 \cdot 5\right)\left(9^2 - 4^2 \cdot 5\right)^i = 4 \cdot 1^i = 4, i \geq 0$$

Soluciones primitivas de la ecuación [#2], en el sentido que no se derivan unas de otras mediante las fórmulas [#4], son (2, 0), (3, 1) y (7, 3). Tenemos entonces tres series de soluciones de [#2]:

$$\left(r_{a,i}, s_{a,i}\right), \quad con \quad r_{a,i} \pm s_{a,i}\sqrt{5} = \left(2 \pm 0\sqrt{5}\right)\left(9 \pm 4\sqrt{5}\right)^i, i \geq 0, \quad donde \quad \left(r_a, s_a\right) = (2,0)$$

$$\left(r_{b,i}, s_{b,i}\right), \quad con \quad r_{b,i} \pm s_{b,i}\sqrt{5} = \left(3 \pm 1\sqrt{5}\right)\left(9 \pm 4\sqrt{5}\right)^i, i \geq 0, \quad donde \quad \left(r_b, s_b\right) = (3,1)$$

$$\left(r_{c,i}, s_{c,i}\right), \quad con \quad r_{c,i} \pm s_{c,i}\sqrt{5} = \left(7 \pm 3\sqrt{5}\right)\left(9 \pm 4\sqrt{5}\right)^i, i \geq 0, \quad donde \quad \left(r_c, s_c\right) = (7,3)$$

Teniendo en cuenta que

$$3 \pm \sqrt{5} = 2\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \qquad 7 \pm 3\sqrt{5} = 2\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 \qquad 9 \pm 4\sqrt{5} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^3$$

las tres series anteriores pueden condensarse en una sola:

$$\left(r_j, s_j\right), \quad con \quad r_j \pm s_j\sqrt{5} = 2\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^j, j \geq 0, \quad con \quad \left(r_0, s_0\right) = (2,0)$$

Sumando y restando estas igualdades, obtenemos explícitamente

$$r_j = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^j + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^j$$

$$s_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^j - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^j\right), \qquad j \geq 0$$

Teniendo en cuenta que $\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, estas fórmulas pueden escribirse como,

$$r_j = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2j} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2j}$$

$$s_j = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2j} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2j}\right), \qquad j \geq 0$$

que corresponden a los términos de índice par de las sucesiones de Lucas y Fibonacci, respectivamente:

r_j: **2**, 1, **3**, 4, **7**, 11, **18**, 29, **47**, 76, **123**, 199, **322**, 521, **843**, 1364, **2207**, 3571, **5778**, 9349, **15127**, ...

s_j: **0**, 1, **1**, 2, **3**, 5, **8**, 13, **21**, 34, **55**, 89, **144**, 233, **377**, 610, **987**, 1597, **2584**, 4181, **6765**, ...

Se han resaltado los valores correspondientes a r_j y s_j, para j= 0, 1, .., 10.

Ambas sucesiones verifican la misma relación de recurrencia: $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$, pero en la sucesión de Lucas es $a_0=2$ y $a_1=1$, mientras que en la de Fibonacci es $a_0=0$ y $a_1=1$.

Deshaciendo el cambio [#1], tenemos

$$n_j = \frac{5s_j + r_j - 2}{10} \qquad k_j = \frac{5s_j - r_j + 2}{10}$$

O llamando u_j a los números de Fibonacci y v_j a los de Lucas,

$$n_j = \frac{5u_{2j} + v_{2j} - 2}{10} \qquad k_j = \frac{5u_{2j} - v_{2j} + 2}{10}$$

Pero para j impar, estos números no resultan enteros, y si lo son para j par. Tomamos entonces,

$$n_j = \frac{5u_{4j} + v_{4j} - 2}{10} \qquad k_j = \frac{5u_{4j} - v_{4j} + 2}{10}$$

Entonces los números

$N_j = \binom{n_j}{k_j - 1} = \binom{n_j - 1}{k_j} = 1$, 3003, 61218182743304701891431482520,
353783517152276505700698314852071849495718735701142713669137522738808260668458303266608833496206146190109047751319782133000090617056558704082023644438947070157551509232541760603309541615191409027157780 7800, ...

j = 1, 2, 3, 4, ... (para j = 0 se obtiene $\binom{0}{-1} y \binom{-1}{0}$)

constituyen una familia infinita, aunque poco densa, de números que aparecen al menos seis veces en el triángulo de Tartaglia (el 3003 es excepcional: a parte de ser capicúa, aparece 8 veces).