Reto 25/6/2024

Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

(a) Calcular la probabilidad de que la parte entera de Y/X sea par.

(b) Calcular la probabilidad de que la parte entera de Y/X sea múltiplo de 3.

Respuesta

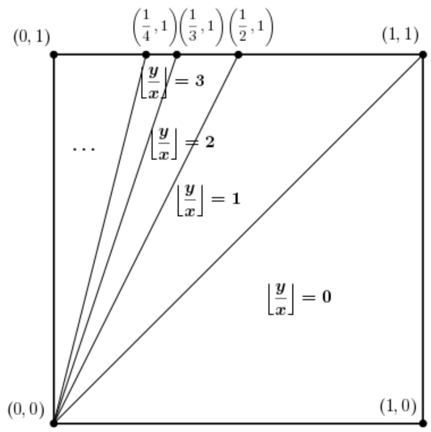
Podemos considerar a X e Y como las coordenadas de un punto en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, que estará distribuido con probabilidad uniforme. Como el área del espacio muestral es 1, las probabilidades pedidas serán numéricamente iguales a las áreas de los conjuntos de puntos que cumplen estas condiciones.

Para $k \geq 1$ entero cualquiera, tenemos que:

$$\left\lfloor \frac{Y}{X} \right\rfloor = k \Leftrightarrow k \leq \frac{Y}{X} < k + 1 \Leftrightarrow kX \leq Y < (k + 1)X$$

Dado que hablamos de una distribución continua de probabilidad, no debemos preocuparnos de la posibilidad de que $X = 0$ o de que las desigualdades sean estrictas o no. La desigualdad anterior, en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ se verifica si y solo si el punto (X, Y) está en el triángulo de vértices $(0,0)$, $\left(\frac{1}{k}, 1\right)$ y $\left(\frac{1}{k+1}, 1\right)$, de área $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$. Además, la probabilidad de que $\left\lfloor \frac{Y}{X} \right\rfloor = 0$ es $\frac{1}{2}$, correspondiente a $Y < X$, o el área del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

Por otra parte, el desarrollo en serie de Maclaurin de $\ln(1 + x)$ es:



$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k, \qquad \forall x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1, x \neq -1$$

Por tanto,

(a) Utilizando que

$$\ln 2 = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k + 1}\right)$$

Tenemos que

$$\boxed{P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k + 1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \ln 2) = 1 - \frac{\ln 2}{2} \cong 0.653426}$$

(b) Ahora será

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{3k + 1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} S$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{3k + 1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

La ausencia de un término de cada 3, sugiere utilizar las raíces cúbicas de 1 o -1 y tomar la parte real o imaginaria de la suma. Como los términos que deben desaparecer son los de denominador $3k+2$, utilizamos el desarrollo

$$x\ \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^{k+1}$$

Utilizando $w=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1_{\frac{\pi}{3}}$ y $x=wt$, tenemos que

$$w^{6k}=1, w^{6k+1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, w^{6k+2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, w^{6k+3}=-1, w^{6k+4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, w^{6k+5}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

por lo que nos queda

$$\begin{aligned} wt\ \ln(1+wt) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(wt)^{k+1} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{t^{3k-1}}{3k-2}-\frac{2t^{3k}}{3k-1}+\frac{t^{3k+1}}{3k}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{t^{3k-1}}{3k-2}-\frac{t^{3k+1}}{3k}\right) \end{aligned}$$

Haciendo $t=1$,

$$w\ \ln(1+w)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{2}{3k-1}+\frac{1}{3k}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k}\right)$$

Tomando la parte imaginaria,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}(1-S) &= \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ln\left(1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\right)=\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ln\left(\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ln\left(\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}\right)\right)=\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\ln 3}{2}+\frac{\pi}{6}i\right)\right)=\frac{3\sqrt{3}\ln 3+\pi}{12}\Rightarrow \end{aligned}$$

$$S=1-\frac{\ln 3}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\ \Rightarrow\ \boxed{P=1-\frac{\ln 3}{4}-\frac{\sqrt{3}\pi}{36}\cong 0.574197}$$

En general, para un $a>1, a\in\mathbb{Z}$ cualquiera, es $P(a)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{ak}-\frac{1}{ak+1}\right)$. Pero la expresión en términos elementales de $P(a)$ se complica progresivamente, de forma algo similar a la construcción de un polígono regular inscrito de a lados. Puede expresarse como $P(a)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a}\left(\psi\left(1+\frac{1}{a}\right)+\gamma\right)$, donde $\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ es la función digamma, $\Gamma(z)$ es la función Gamma de Euler, y γ es la constante de Euler-Mascheroni.