# Cuadrados inscritos en una cúbica

En lo que sigue designaremos, algo incorrectamente y en aras de la brevedad, como «cúbica» a la gráfica de un polinomio de 3er grado, y consideraremos solo polinomios mónicos: $y = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Sin pérdida de generalidad, podemos trasladar su punto de inflexión al origen, de manera que $a_2 = a_0 = 0$. Nos queda entonces el polinomio en la forma reducida $y = x^3 - ax$, donde se ha hecho $a = - a_1$ por conveniencia.

Veamos que, si hay un cuadrado inscrito, su centro debe coincidir necesariamente con el punto de inflexión. Sea P(m, n) el centro del cuadrado inscrito. La curva simétrica respecto de P debe pasar igualmente por los cuatro vértices del cuadrado. Pero la curva simétrica, se obtiene haciendo el cambio $(x', y') = (2m - x, 2n - y)$, lo que nos produce otro polinomio cúbico en $x$. Pero si ambos polinomios de tercer grado coinciden en cuatro puntos, deben coincidir en todos y se trata del mismo polinomio. El centro debe ser entonces el punto de inflexión, punto necesariamente único respecto el que la gráfica es simétrica. El cuadrado tendrá entonces un vértice en cada cuadrante y tiene que ser $a > 0$.

Si una de las diagonales tiene por ecuación $y = mx$, la otra será $y = -\frac{1}{m}x$. Tomaremos entonces $m > 0$. Debe ser $m \neq 0$, pues de lo contrario tendríamos dos vértices del cuadrado con la misma abscisa. Sea $A(p, q)$ el vértice del primer cuadrante. Los del segundo, tercero y cuarto serán será entonces $B(-q, p)$, $C(-p, -q)$ y $D(q, -p)$.

Se tiene para $A$ y $B$:

$$A:\quad q = p^3 - ap = mp \Rightarrow p^2 = m + a \qquad (\#1)$$

$$B:\quad p = -q^3 + aq = \frac{-1}{m}(-q) = \frac{q}{m} \Rightarrow q^2 = a - \frac{1}{m} \qquad (\#2)$$

Reemplazando en #2 $q = mp$

$$m^2p^2 = a - \frac{1}{m} \qquad (\#3)$$

Multiplicando #1 por $m^2$ e igualando con #3,

$$m^3 + am^2 = a - \frac{1}{m} \Leftrightarrow m^4 + am^3 - am + 1 = 0 \qquad (\#4)$$

Esta es una ecuación *opuesto-recíproca*, en la que si $m$ es una solución, $-\frac{1}{m}$ también lo es, lo que se corresponde con que las diagonales del cuadrado son perpendiculares. Tendremos por tanto 0, 2 o 4 soluciones, correspondiendo a 0, 1 o 2 cuadrados inscritos. Dividiendo por $m^2$,

$$m^2 + \frac{1}{m^2} + a\left(m - \frac{1}{m}\right) = 0$$

y haciendo el cambio:

$$t = m - \frac{1}{m} \Rightarrow t^2 = m^2 + \frac{1}{m^2} - 2$$

$t^2 + at + 2 = 0 \;\Rightarrow t = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-8}}{2}$

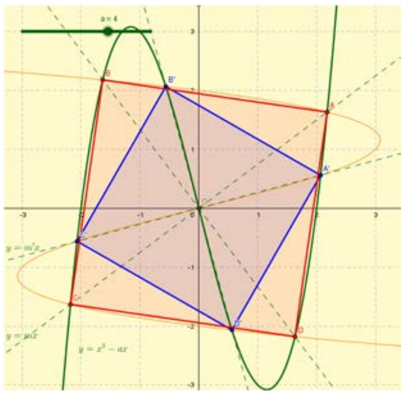
Vemos entonces que si $a < 2\sqrt{2}$ no hay soluciones, para este valor hay una, y para valores mayores, dos. Deshaciendo el cambio,

$$t = m - \frac{1}{m} \;\Rightarrow\; m^2 - tm - 1 = 0 \;\Rightarrow m = \frac{t \pm \sqrt{t^2+4}}{2}$$

Como estamos interesados en las pendientes positivas, consideramos solo el signo '+'. Nos quedan entonces,

$$m = \frac{\frac{-a\pm\sqrt{a^2-8}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-a\pm\sqrt{a^2-8}}{2}\right)^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2+8\mp 2a\sqrt{a^2-8}} \pm \sqrt{a^2-8} - a}{4}$$

Para $a = 2\sqrt{2}$, tenemos $t = -\sqrt{2}$ y $m = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, mientras que para $a > 2\sqrt{2}$ hay dos soluciones:



$$m = \frac{\sqrt{2a^2+8-2a\sqrt{a^2-8}} + \sqrt{a^2-8} - a}{2}, \qquad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} < m < 1$$

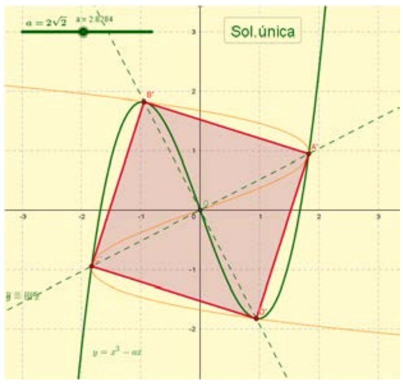
$$m' = \frac{\sqrt{2a^2+8+2a\sqrt{a^2-8}} - \sqrt{a^2-8} - a}{2}, \qquad 0 < m < \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

Cuando $a \to \infty,\; m \to 1$ y $m' \to 0$.

Los vértices son los puntos:

$$A = \left(\sqrt{a+m}, \sqrt{a-\frac{1}{m}}\right), B = \left(-\sqrt{a-\frac{1}{m}}, \sqrt{a+m}\right)$$

$$C = \left(-\sqrt{a+m}, -\sqrt{a-\frac{1}{m}}\right), D = \left(\sqrt{a-\frac{1}{m}}, -\sqrt{a+m}\right)$$




Y el área del cuadrado,

$$S = |AB|^2 = 2\left(2a + m - \frac{1}{m}\right)$$

Donde pueden colocarse $'$ a la pendiente y nombres de los vértices.

Para $a = 2\sqrt{2}$, se tiene $A = \left(\frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{3+\sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{8}\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\right)$ y $S = 6\sqrt{2}$.