Lugar geométrico de los centros de los triángulos equiláteros inscritos en una cónica

Resumen: Se trata en general de una cónica del mismo tipo, incluyendo las cónicas degeneradas que admiten inscribir un triángulo equilátero, como los pares de rectas secantes y paralelas. Para encontrar la ecuación del lugar geométrico de los centros, se plantea el sistema formado por la ecuación de la cónica y la de la circunferencia circunscrita al triángulo, que la cortará en los tres vértices y en un cuarto punto. Se elimina sucesivamente una variable entra ambas ecuaciones, para obtener sendas ecuaciones de 4º grado en cada una de ellas. Aplicando las relaciones de Cardano-Vieta a ambas, y teniendo en cuenta que el centro del triángulo es el baricentro de tres de las raíces, se obtienen las coordenadas del cuarto punto de intersección en función de las del centro. Sustituyéndolas en la ecuación de la cónica, se obtiene la ecuación del lugar. Se verá a continuación en detalle para los distintos tipos de cónicas. Se utilizan, sin perdida de generalidad, las ecuaciones reducidas de las cónicas.

Elipses

Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (#1) Circunferencia circunscrita: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ (#2)

Despejando y en #2: $y = n \pm \sqrt{r^2 - (x-m)^2}$

Y sustituyendo en #1:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(n \pm \sqrt{r^2-(x-m)^2}\right)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2\left(n^2 + r^2 - (x-m)^2 \pm 2n\sqrt{r^2-(x-m)^2}\right) - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2 + a^2n^2 + a^2r^2 - a^2(x-m)^2 - a^2b^2 = \mp 2na^2\sqrt{r^2-(x-m)^2}$$

Elevando al cuadrado,

$$(b^2x^2 + a^2n^2 + a^2r^2 - a^2(x-m)^2 - a^2b^2)^2 = 4n^2a^4(r^2 - (x-m)^2)$$

Solo nos interesan los coeficientes de los términos de tercer y cuarto grado, por lo que nos basta con estudiar el primer miembro de la igualdad. Ordenándolo antes de elevar al cuadrado,

$$\left((b^2-a^2)x^2 + 2a^2mx + a^2(n^2 + r^2 - m^2 - b^2)\right)^2$$

Los términos que nos interesan son entonces

$$(a^2 - b^2)^2x^4 - 4a^2m(a^2 - b^2)x^3$$

Y la suma de las cuatro raíces será, por las relaciones de Cardano-Vieta, el cociente de estos coeficientes con signo menos:

$$-\frac{c_3}{c_4} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{4a^2m}{a^2 - b^2}$$

Pero $m = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, de lo que resulta $x_4 = \frac{4a^2m}{a^2-b^2} - 3m = \frac{m(a^2+3b^2)}{a^2-b^2}$

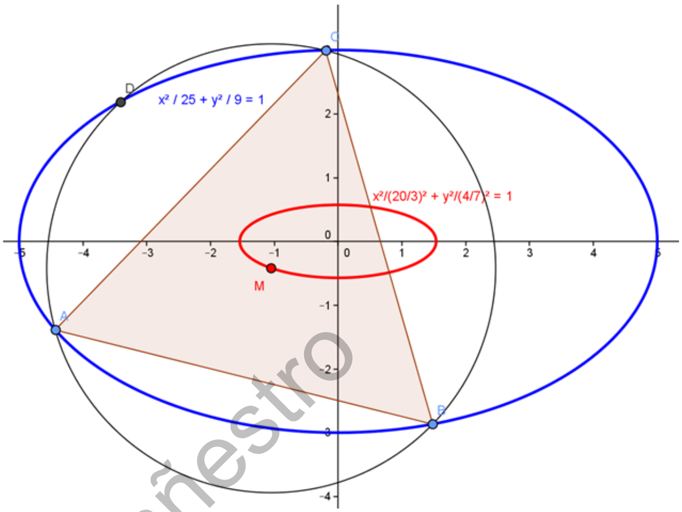
Análogamente, se obtiene: $y_4 = \frac{n(3a^2+b^2)}{b^2-a^2}$

Sustituyendo en #1, ya que (x_4, y_4) está en la elipse,

$$\frac{m^2}{\left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+3b^2}\right)^2}+\frac{n^2}{\left(\frac{b(a^2-b^2)}{3a^2+b^2}\right)^2}=1 \qquad (\#4)$$

Se trata de una elipse centrada en el origen, con los mismos ejes que la de partida y semiejes

$a'=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+3b^2}$, $\quad b'=\frac{b(a^2-b^2)}{3a^2+b^2}$



Claramente menores que a y b. En particular, si se trataba de una circunferencia, a = b, se obtiene una circunferencia de radio a' = b' = 0. El lugar geométrico se reduce, como era de esperar, al centro.

Si es a ≠ b, ambas elipses tienen la misma orientación. En efecto, partiendo de la desigualdad evidente

$$3(a^2+ab+b^2)>ab$$

Se tiene que si a > b,

$$3(a^3-b^3)>ab(a-b)\Rightarrow 3a^3+ab^2>3b^3+a^2b \;\Rightarrow\; \frac{a}{a^2+3b^2}>\frac{b}{3a^2+b^2}\Rightarrow a'>\;b'$$

Igualmente, a < b ⇒ a' < b'.

Hipérbolas

De forma enteramente similar al caso de elipses,

Hipérbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (#5) Circunferencia circunscrita: $(x-m)^2+\;(y-n)^2=r^2$ (#2)

Despejando y en #2: $y=n\pm\sqrt{r^2-(x-m)^2}$

Y sustituyendo en #5:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\left(n\pm\sqrt{r^2-(x-m)^2}\right)^2}{b^2}=1\;\Rightarrow b^2x^2-a^2\left(n^2+r^2-(x-m)^2\;\pm 2n\sqrt{r^2-(x-m)^2}\;\right)-a^2b^2=0$$

$$b^2x^2-a^2n^2-a^2r^2+a^2(x-m)^2-\;a^2b^2=\pm 2na^2\sqrt{r^2-(x-m)^2}$$

Elevando al cuadrado,

$$(b^2x^2-a^2n^2-a^2r^2+a^2(x-m)^2-\;a^2b^2)^2=4n^2a^4(r^2-(x-m)^2)$$

Solo nos interesan los coeficientes de los términos de tercer y cuarto grado, por lo que nos basta con estudiar el primer miembro de la igualdad. Ordenándolo antes de elevar al cuadrado,

$$\left((a^2+b^2)x^2-2a^2mx-\;a^2(n^2+r^2-m^2+b^2)\right)^2$$

Los términos que nos interesan son entonces

$$(a^2 + b^2)^2x^4 - 4a^2m(a^2 + b^2)x^3$$

Y la suma de las cuatro raíces será, por las relaciones de Cardano-Vieta, el cociente de estos coeficientes con signo menos:

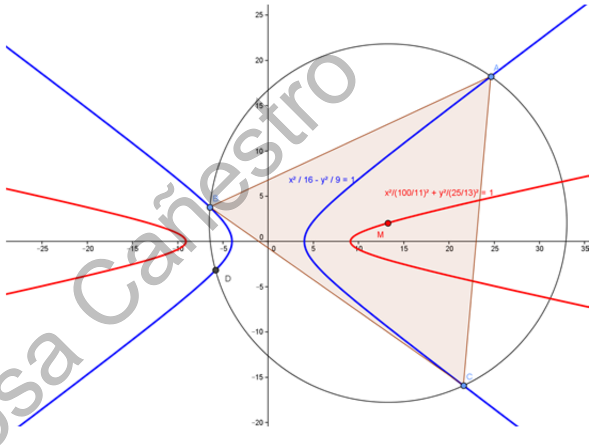
$$-\frac{c_3}{c_4} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{4a^2m}{a^2 + b^2}$$

Pero $m = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, de lo que resulta $x_4 = \frac{4a^2m}{a^2+b^2} - 3m = \frac{m(a^2-3b^2)}{a^2+b^2}$

Análogamente, se obtiene: $y_4 = \frac{n(b^2-3a^2)}{b^2+a^2}$

Sustituyendo en #5, ya que (x_4, y_4) está en la hipérbola,

$$\frac{m^2}{\left(\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-3b^2}\right)^2} - \frac{n^2}{\left(\frac{b(a^2+b^2)}{b^2-3a^2}\right)^2} = 1 \qquad (\#6)$$



Se trata en general de una hipérbola centrada en el origen, con los mismos ejes que la de partida y semiejes

$$a' = \frac{a(a^2+b^2)}{|a^2-3b^2|}, \qquad b' = \frac{b(a^2+b^2)}{|b^2-3a^2|}$$

Si es a = b, hipérbola equilátera, se tiene que a'= b' = a, con lo que el lugar es la propia hipérbola. Esto es un caso particular de un resultado conocido: el ortocentro de cualquier triángulo inscrito en una hipérbola equilátera se halla sobre la propia hipérbola. Si b > a, el lugar es exterior a la hipérbola, pues a' < a y b' > b, y si b < a es interior, pues a' > a y b' < b.

Si es $b = \sqrt{3}a,$ el lugar esta formado por un par de rectas paralelas reales $m^2 = a^2/4$.

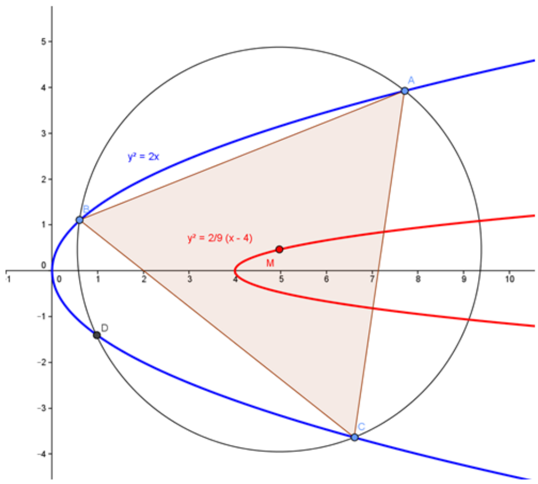
Y si es $a = \sqrt{3}b,$ el lugar esta formado por un par de rectas paralelas imaginarias $n^2 = -b^2/4$.

Parábola

Parábola: $y^2 = 2px$ (#7) Circunferencia circunscrita: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ (#2)

Sustituyendo $x = \frac{y^2}{2p}$ en #2,

$$\left(\frac{y^2}{2p} - m\right)^2 + (y-n)^2 = r^2$$



El término de tercer grado es cero, por lo que $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \Rightarrow y_4 = -3n$

Sustituyendo en #2 $y = \sqrt{2px}$,

$$(x-m)^2 + (\sqrt{2px} - n)^2 = r^2 \Rightarrow \sqrt{2px} = n \pm \sqrt{r^2 - (x-m)^2}$$

$$2px = n^2 \pm 2n\sqrt{r^2 - (x-m)^2} + r^2 - x^2 + 2mx - m^2$$

$$(x^2 - 2(m-p)x + m^2 - n^2 - r^2)^2 = 4n^2(r^2 - (x-m)^2)$$

Los términos de tercer y cuarto grado son $x^4 - 4(m-p)x^3$, por lo que

$-\frac{c_3}{c_4} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4(m-p) \Rightarrow x_4 = m - 4p$

Sustituyendo en #7, ya que (x_4, y_4) está en la parábola,

$$n^2 = \frac{2p}{9}(\mathrm{m} - 4p)$$

Se trata de otra parábola, interior a la original, con el mismo eje y orientación, con parámetro p/9 y vértice desplazado 4p unidades.