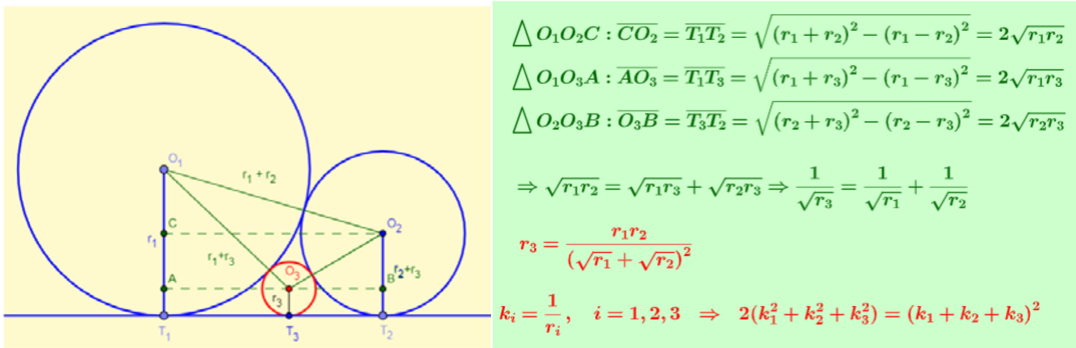
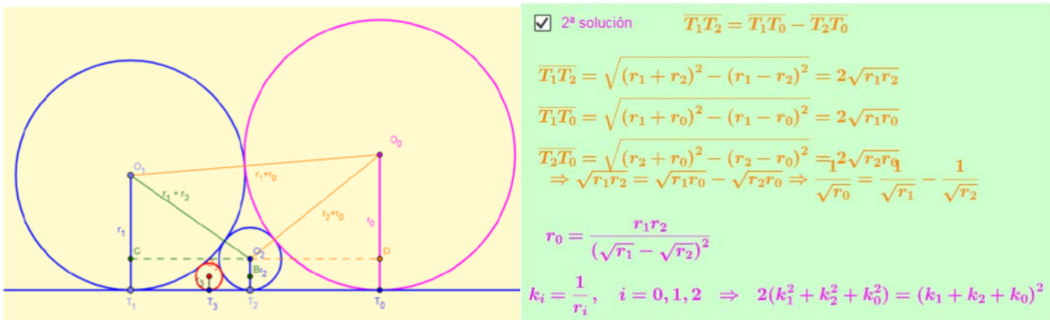
Circunferencias tangentes entre sí y a una recta

Si se tienen dos circunferencias tangentes entre sí y a una recta, siempre es posible encontrar otra tangente a las tres líneas y situada entre ellas.



Si las dos circunferencias no tienen igual radio, además puede encontrarse otra de mayor radio que deja a una de las iniciales en el interior:



La relación entre las curvaturas, inversas de los radios, se obtiene elevando dos veces al cuadrado la relación entre los radios para eliminar las raíces. Se obtiene la misma en los dos casos. En la relación entre las curvaturas, se puede incluir la de la recta, que es cero. Queda entonces un caso particular del Teorema de Descartes para las curvaturas de 4 circunferencias mutuamente tangentes (extendida por Soddy y Gosset para 5 esferas mutuamente tangentes en el espacio y para n + 2 hiperesferas en el espacio de n dimensiones). En cualquier caso, si una hiperesfera engloba a las demás, su curvatura debe considerarse negativa.

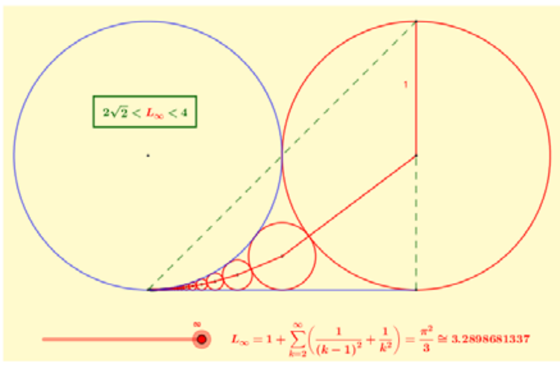
Se pueden seguir inscribiendo sucesivas circunferencias entre las anteriores y la recta. Veremos dos secuencias particulares de estas circunferencias

1. Cada nueva circunferencia es tangente a la anterior y a la primera

Si hacemos los radios de las dos primeras circunferencias $r_0 = r_1 = 1$ y llamamos r_n al de las sucesivas, se tiene, según lo anterior,

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{\left(1+\sqrt{r_n}\right)^2}, r_0 = r_1 = 1$$

$$r_n = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$$



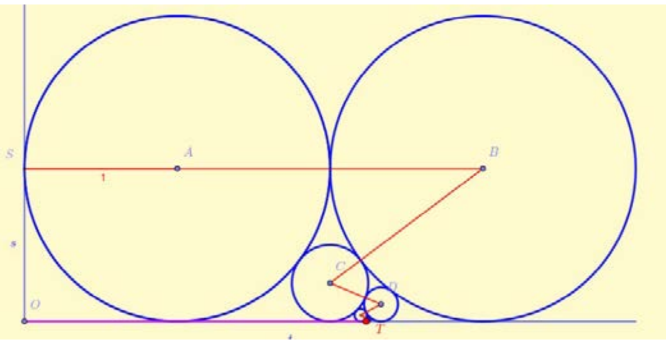
Veamos que es $r_n = \frac{1}{n^2}\ \forall n \geq 1$. Es cierto para n =1, 2 y supongamos que es cierto para r_n. Entonces,

$$r_{n+1} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1+\sqrt{\frac{1}{n^2}}\right)^2} = \frac{1}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (qed)$$

¿Cuál es la longitud **L∞** de la poligonal que parte de la periferia de la 1ª circunferencia añadida y pasa por todos los centros (línea roja de la figura)? Evidentemente debe ser $\mathbf{2\sqrt{2}}$ <**L∞**< **4**. Teniendo en cuenta que el primer segmento es 1 y los demás son la suma de dos radios consecutivos, se tiene que:

$$\boxed{L_\infty = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \cong 3.289868}$$

2. Cada nueva circunferencia es tangente a las dos anteriores



Sea ahora r1 = r2 = 1 y

$$r_{n+2} = \frac{r_n r_{n+1}}{\left(\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}}\right)^2}$$

Se tiene que

$$r_n = 1,1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{25},\frac{1}{64},\ldots$$

Veamos que es $r_n = \frac{1}{{F_n}^2}$

siendo F_n el n-simo número de Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Es cierto para r_1 y r_2, así que supongamos que es cierto $\forall n < k$. Entonces,

$$r_k = \frac{r_{k-1}r_{k-2}}{\left(\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_{k-2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{F_{k-1}^2}\frac{1}{F_{k-2}^2}}{\left(\frac{1}{F_{k-1}}+\frac{1}{F_{k-2}}\right)^2} = \frac{1}{(F_{k-2}+F_{k-1})^2} = \frac{1}{{F_k}^2} \quad (qed)$$

La longitud **L∞** de la poligonal dibujada, incluyendo dos radios de cada una de las circunferencias iniciales, es entonces:

$$L_\infty = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_n^2} = \frac{5}{12}\left(2\theta_2(\varphi^{-2})^4 - \theta_3(\varphi^{-2})^4 + 1\right) \cong 4.8526415$$

Donde $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1.618$ es la razón áurea y θ_2 y θ_3 son funciones **[θ de Jacobi]**.

¿Cuál es la longitud **OT** en la figura anterior? La proyección horizontal $\mathbf{d_n}$ del segmento que une los centros $\mathbf{O_n}$ y $\mathbf{O_{n+1}}$ de dos circunferencias consecutivas es:

$$d_n = \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}} = \frac{2}{F_n F_{n+1}}$$

$$
\begin{aligned}
OT &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{F_nF_{n+1}} = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{F_{2k-1}F_{2k}}-\frac{1}{F_{2k}F_{2k+1}}\right)\\
&= 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2k}}\left(\frac{1}{F_{2k-1}}-\frac{1}{F_{2k+1}}\right) = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cancel{F_{2k}}}{F_{2k-1}\cancel{F_{2k}}F_{2k+1}}\\
&= 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2k-1}F_{2k+1}} = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+F_{2k}^2}
\end{aligned}
$$

En la última igualdad se ha empleado para $n = 2k$ la **identidad de Cassini**:

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2 = (-1)^n$$

Esta identidad se demuestra de forma casi inmediata utilizando determinantes:

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2 = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{vmatrix}^n = (-1)^n$$

Teniendo en cuenta la recurrencia que define a los números de Fibonacci y que

$$\begin{pmatrix} F_k & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_{k-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k+F_{k-1} & F_k \\ F_{k-1}+F_{k-2} & F_{k-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1}\end{pmatrix}$$

Hallemos el valor de la última serie $S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+F_{2k}^2}$. Para ello veamos los primeros valores de sus sumas parciales:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+F_{2k}^2} = \frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{8}{13},\cdots;\ \ n = 1,2,3,\ldots$$

Probemos entonces que $S_n = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$. Hemos visto que es cierto para los tres primeros valores de *n*. Veamos que es cierto para *n + 1* si lo es para *n*, con lo que quedará probado para todo *n*:

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{1+F_{2k}^2} = S_n+\frac{1}{1+F_{2n+2}^2} = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}+\frac{1}{1+F_{2n+2}^2} \doteq \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}+\frac{1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}\\
&= \frac{F_{2n}F_{2n+3}+1}{F_{2n+1}F_{2n+3}} = \frac{F_{2n}F_{2n+2}+F_{2n}F_{2n+1}+1}{F_{2n+1}F_{2n+3}}\\
&\ddot{=} \frac{F_{2n+1}^2-\cancel{1}+F_{2n}F_{2n+1}+\cancel{1}}{F_{2n+1}F_{2n+3}} = \frac{\cancel{F_{2n+1}}(F_{2n+1}+F_{2n})}{\cancel{F_{2n+1}}F_{2n+3}} = \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+3}}\\
&= \frac{F_{2(n+1)}}{F_{2(n+1)+1}} \qquad\qquad (qed)
\end{aligned}
$$

En $(\doteq)$ y $(\ddot{=})$ se ha utilizado la **Identidad de Cassini** con $n \coloneqq 2n+2$ y $n \coloneqq 2n+1$ respectivamente. Entonces,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}} = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\boxed{\overline{OT} = 1 + 2\,S = \cancel{1} + \cancel{2}\frac{\sqrt{5}-\cancel{1}}{\cancel{2}} = \sqrt{5}}$$

Donde se ha utilizado que el cociente de números de Fibonacci consecutivos tiende a φ, lo que se deduce por ejemplo de la Fórmula de Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi^{-1})^n) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$$