ABAU 2024 Junio Galicia

Pregunta 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A y B dos matrices tales que $A+2B=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ y $A+B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz X que satisface la igualdad $A^2X-(A+B)^T=3I-2X$, siendo *I* la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $(A+B)$.

Respuesta.

a) $A=2(A+B)-(A+2B)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $(A^2+2I)X=3I+(A+B)^T$

$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}24 & -15\\ -6 & 30\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}8 & -5\\ -2 & 10\end{pmatrix}$

Pregunta 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} mx+(m+2)y+z=3\\ 2mx+3my+2z=5\\ (m-4)y+mz=m\end{cases}$

Respuesta.

$$|A|=\begin{vmatrix}m & m+2 & 1\\ 2m & 3m & 2\\ 0 & m-4 & m\end{vmatrix}=m^3-4m^2=m^2(m-4)$$

$m\neq 0,4\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow rg(A)=rg(A^*)=3\ \Rightarrow s.c.d.$

$$m=0\Rightarrow\begin{cases}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow rg(A)=2\\ \begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ -4 & 0 & 0\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow rg(A^*)=3\end{cases}\Rightarrow\ s.i.$$

$$m=4\Rightarrow\begin{cases}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0\Rightarrow rg(A)=2\\ \begin{vmatrix}6 & 1 & 3\\ 12 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 4\end{vmatrix}=24\neq 0\Rightarrow rg(A^*)=3\end{cases}\Rightarrow\ s.i.$$

(Se han utilizado las dos/tres últimas columnas y filas de la matriz ampliada en cada caso)

Para *m = 4* basta ver que la 1ª y 2ª ecuaciones son incompatibles, pues 2*1ª - 2ª $\Longrightarrow$ *0 = 1*.

Pregunta 3. Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y Bolzano.
b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}$.

Respuesta:

a) Teorema de Rolle: «Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), y f(a) = f(b) $\Longrightarrow \exists$ c $\in$ (a, b) tal que f'(c)=0».
Teorema de Bolzano: «Si f es una función continua en [a, b] y f(a)·f(b) < 0 $\Longrightarrow \exists$ c $\in$ (a, b) tal que f(c)=0».

b) $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\left(2xe^{x^2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C$

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = 2xe^{x^2}dx \Rightarrow v = e^{x^2}$

Pregunta 4. Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \ln(1+x)}{x\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$

Respuesta:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \ln(1+x)}{x\sin x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x\cos x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2\cos x - x\sin x} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cos x - e^x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) - e^x}{2} = \frac{0}{2} = 0$

Nota: Antes de aplicar la regla de L'Hôpital debe comprobarse que numerador y denominador tienden ambos a 0 o ambos a ∞ (a 0 en todos los casos de este problema).

Pregunta 5. Geometría. (2 puntos)

a) Considérese el plano π: $4x + 2y + bz = 2$ y la recta r: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-c}{2} = \frac{z-3}{4}$, donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que a recta r esté contenida en π.
b) Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano π': $4x + 2y - 4z = 2$.

Respuesta:

a) El vector director de la recta y el vector normal al plano deben ser perpendiculares: $(4,2,b)\cdot(3,2,4) = 16 + 4b = 0 \Rightarrow \boxed{b=-4} \Rightarrow \pi: 4x + 2y - 4z = 2$

El punto (2, c, 3) por el que pasa la recta, debe estar en el plano:

$4\cdot 2 + 2\cdot c - 4\cdot 3 = 2 \Rightarrow \boxed{c = 3}$

b) $D(P,\pi') = \frac{|4\cdot 1 + 2(-1) - 4(-1) - 2|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Pregunta 6. Geometría. (2 puntos)

a) Considérense los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a *Q*, *R* y *S*.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano $\pi: 4x+23y+6z-35=0$.

Respuesta:

a) Si $P(x,y,z)$ es un punto cualquiera del plano, los vectores $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{QS}$ deben ser coplanarios, por lo que su ecuación será:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 4 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -4(x+1)-23(y-3)-6(z+5) = -4x-23y-6z+35=0$$

O, cambiándole el signo, $\pi: 4x+23y+6z-35=0$

b) El vector director de la recta es $\vec{v}=(4,23,6)$ y ha de pasar por P, luego:

$$r: \begin{cases} x = 3+4t \\ y = -1+23t \\ z = -1+6t \end{cases}, \quad r: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$$

Pregunta 7. Estadística y probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$,

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\bar{A}\middle|(\bar{A}\cup\bar{B})\right)$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\bar{A}\middle|(\bar{A}\cup\bar{B})\right)$.

(Nota: $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son los sucesos contrarios de A y B respectivamente)

Respuesta:

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Si se trata de sucesos independientes, $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ y:

$$P(A\cup B) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P\left(\bar{A}\middle|(\bar{A}\cup\bar{B})\right) = \frac{P\left(\bar{A}\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\right)}{P(\bar{A}\cup\bar{B})} = \frac{P(\bar{A})}{P(\overline{A\cap B})} = \frac{1-P(A)}{1-P(A\cap B)} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{4}{5}$$

b) Si se trata de sucesos incompatibles, $P(A\cap B)=0$ y:

$$P(A\cup B) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

$$P\left(\bar{A}\middle|(\bar{A}\cup\bar{B})\right) = \frac{P\left(\bar{A}\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\right)}{P(\bar{A}\cup\bar{B})} = \frac{P(\bar{A})}{P(\overline{A\cap B})} = \frac{1-P(A)}{1-P(A\cap B)} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1-0} = \frac{2}{3}$$

Pregunta 8. Estadística y probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

Respuesta:

Se trata de una normal $N(500, 4)$. Sea $p(Z)$ la probabilidad de que una variable con distribución $N(0, 1)$ sea menor o igual que Z.

a) $P(499 \leq X \leq 502) = p\left(\frac{502-500}{4}\right) - p\left(\frac{499-500}{4}\right) = p(0.5) - p(-0.25)$
$= 0.6915 - \left(1 - p(0.25)\right) = \ 0.6915 + 0.5987 - 1 = 0.2902$

b) Sea X_0 tal cantidad. Claramente es $X_0 < 500$, la media.

$$P(X > X_0) = 1 - P(X \leq X_0) = 0.975 \ \Rightarrow P(X \leq X_0) = p\left(\frac{X_0 - 500}{4}\right)$$
$$= 1 - p\left(\frac{500 - X_0}{4}\right) = 0.025 \Rightarrow p\left(\frac{500 - X_0}{4}\right) = 0.975 \Rightarrow \frac{500 - X_0}{4}$$
$$= 1.96 \Rightarrow X_0 = 500 - 4 \cdot 1.96 = 492.16\, ml$$