ABAU Convocatoria extraordinaria 2024 MATEMÁTICAS II **Galicia**

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

Pregunta 1. Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ dé respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si x= -1 e y = 1, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

Respuesta.

a) $X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. Debe ser $AX = XA = O$, la matriz nula de orden 2.

$$AX - XA = \begin{pmatrix} -a & a \\ -ay & ax \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ax & ay \\ -a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a(1+x) & a(1-y) \\ a(1-y) & a(1+x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \forall a \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) $2M = A^{-1} - AM \Rightarrow AM + 2M = (A + 2I)M = A^{-1} \Rightarrow M = (A + 2I)^{-1}A^{-1} = (A(A + 2I))^{-1}$

$$B = A(A + 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 20 \neq 0 \Rightarrow \exists M = B^{-1}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (B^T)^{Adj} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M = B^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2. Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx \qquad + 3z = m \end{cases}$

Respuesta.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 3 + 3m = 3(m - 3)$$

$$m \neq 3 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow rg(M) = rg(M^*) = 3 \ \Rightarrow s.c.d.$$

En particular, para $m = 0$ el sistema es homogéneo y su única solución es la trivial, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$$m = 3 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 2 \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0 \Rightarrow rg(M^*) = 3 \end{cases} \Rightarrow \ s.i.$$

Pregunta 3. Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & si\ x \leq 0, \\ \frac{k - xe^x}{x} & si\ x > 0, \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en $x = 0$ para cualquier valor de b?
b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$?

Respuesta:

a) Para que f sea continua en x=0, deben existir ambos límites laterales y coincidir con el valor de la función en x = 0:
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 = f(x)$
Para que $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ sea finito, el numerador debe tender a 0, ya que lo hace el denominador. Por tanto, debe ser $k = \lim_{x \to 0^+} xe^x = 0$. En este caso, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$= $\lim_{x \to 0^+} -e^x = -1$, por lo que *f(x)* es continua en *x = 0* para *k = 0* y *b* cualquiera.

b) Para que sea derivable debe ser continua, por lo que tiene que ser *k = 0*. En estas condiciones, es suficiente ver que el límite de la derivada es el mismo por ambos lados.
$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & si\ x \leq 0 \\ -e^x & si\ x > 0 \end{cases}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x + b & si\ x < 0 \\ -e^x & si\ x > 0 \end{cases}$
$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = b$, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1 \Rightarrow b = -1$, y *f'(0) = -1.*

Pregunta 4. Análisis. (2 puntos)

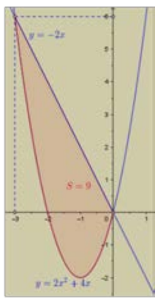
Determine el valor del número positivo *a* que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Respuesta:

La recta y la parábola se cortan en los puntos que verifican ambas ecuaciones, por lo que debe ser

$$-2x = ax^2 + 4x \Rightarrow ax^2 + 6x = (ax + 6)x = 0 \Rightarrow x = 0, -\frac{6}{a}$$

Como a >0, se tiene que la parábola es convexa (cóncava hacia arriba) y $-\frac{6}{a} < 0$, estando situada la recta por encima de la parábola en el intervalo $\left(-\frac{6}{a},\ 0\right)$. Entonces,



$$9 = \int_{-\frac{6}{a}}^{0} \left(-2x - (ax^2 + 4x)\right) dx = \int_{-\frac{6}{a}}^{0} (-ax^2 - 6x)\, dx = \left| -\frac{ax^3}{3} - 3x^2 \right|_{-\frac{6}{a}}^{0}$$

$$= \frac{a\left(\frac{-6}{a}\right)^3}{3} + 3\left(\frac{-6}{a}\right)^2 = \frac{-72 + 108}{a^2} \Rightarrow 9a^2 = 36, a > 0 \Rightarrow a = 2$$

Pregunta 5. Geometría. (2 puntos)

Considérese el plano π: $x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos *A(2,1,2)* y *B(0,1,1)*. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.
b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contienen a r y es perpendicular a π.

Respuesta:

a) El vector director de la recta es $\vec{v} = \overrightarrow{BA} = (2, 0, 1)$ y el vector normal al plano es $\vec{u} = (1,2,-2)$. Como es $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, -2) \cdot (2,0,1)$, estos vectores son perpendiculares y la recta es paralela al plano. Como los puntos A y B verifican la ecuación del plano (es suficiente con uno, puesto que recta y plano son paralelos), la recta está contenida en el plano.
b) El vector normal al plano pedido debe ser perpendicular al correspondiente al plano π y al vector director de la recta. Será

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, 5, -4)$$

Debe contener también al punto *A*, por lo que su ecuación es:

$$2(x-2) + 5(y-2) - 4(z-2) = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 4z - 6 = 0$$

Pregunta 6. Geometría. (2 puntos)

Sea r la recta que pasa por los puntos *A(-1, 3, -5)* y *B(1, 2, -5)* y π el plano que pasa por el punto *C(5, 0, 1)* y es perpendicular a *r*. Se piden las ecuaciones paramétricas de *r*, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de *r* con π.

Respuesta:

El vector director de la recta y perpendicular al plano es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2, -1, 0)$. Las ecuaciones paramétricas de r son entonces:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -5 \end{cases}$$

La ecuación del plano es:

$$2(x+1) - (y-3) + 0(z-5) = 0 \Rightarrow 2x - y + 5 = 0$$

Para hallar el punto de intersección, sustituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano, a fin de hallar el valor del parámetro:

$$2(-1+2t) - (3-t) + 5 = 0 \Rightarrow 5t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Por lo que se trata del punto *A(-1, 3, -5)*

Pregunta 7. Estadística y probabilidad. (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Respuesta:

Se trata del suceso contrario a que haya 0 o 1 infértiles:

$$P = 1 - \binom{7}{0}\left(\frac{13}{100}\right)^0\left(\frac{87}{100}\right)^7 - \binom{7}{1}\left(\frac{13}{100}\right)^1\left(\frac{87}{100}\right)^6 = \frac{100^7 - 87^7 - 7\cdot 13\cdot 87^6}{100^7} \cong 0.2281$$

Pregunta 8. Estadística y probabilidad. (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

Respuesta:

Se trata de una normal $N(20000, 2500)$. Sea $p(Z)$ la probabilidad de que una variable con distribución $N(0,1)$ sea menor o igual que Z.

a) $P(X \leq 17000) = p\left(\frac{17000-20000}{2500}\right) = p(-1.2) = 1 - p(1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$

b) Sea X_0 tal cantidad. Claramente es $X_0 < 500$, la media.

$$P(X > X_0) = 1 - P(X \leq X_0) = 0.985 \Rightarrow P(X \leq X_0) = p\left(\frac{X_0 - 20000}{2500}\right)$$
$$= 1 - p\left(\frac{20000 - X_0}{2500}\right) = 0.015 \Rightarrow p\left(\frac{20000 - X_0}{2500}\right) = 0.985$$
$$\Rightarrow \frac{20000 - X_0}{2500} = 2.17 \Rightarrow X_0 = 20000 - 2500\cdot 2.17 = 14575 \text{ horas}$$